SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA
Anno Accademico 1993-94

Bruno Franchi

DISUGUAGLIANZE DI SOBOLEV-POINCARÉ ASSOCIATE A UNA FAMIGLIA DI CAMPI VETTORIALI

13 gennaio 1994

Tecnoprint - Bologna 1994

Riassunto. In questa nota annunciamo alcuni risultati ottenuti in collaborazione con G. Lu e R.L. Wheeden riguardanti disuguaglianze di Sobolev-Poincaré associate a una famiglia di campi vettoriali che soddisfano l'ipotesi di Hörmander sul rango dell'algebra di Lie. Si ottengono risultati ottimali in sfere metriche associate ai campi vettoriali e si introduce una condizione geometrica che assicura la validità della disuglianza su aperti più generali. Infine, applicando questi risultati, si prova una disuguaglianza isoperimetrica relativa associata ai campi vettoriali.

Abstract. In this note we state some recent results obtained in a joint work with G. Lu and R.L. Wheeden which concern Sobolev-Poincaré inequalities associated with vector fields satisfying Hörmander condition on the Lie algebra. We prove optimal results in a family of suitable metric balls associated with the vector fields. Previously known results about this problem don't cover the so-called geometric case, where the gradient at the right hand side of the inequality appears at the power $p = 1$. The first step consists of a suitable representation formula for the difference between a function in a metric ball and its average on the ball. Then the inequality follows by applying an integration technique which avoids any interpolation argument. Moreover, we introduce a geometric condition (called Boman chain condition) which enables us to prove Sobolev-Poincaré inequalities in more general domains. Finally, a relative isoperimetric inequality associated with the vector fields follows by standard arguments.

In questo seminario intendo esporre alcuni recenti risultati ottenuti in collaborazione con G. Lu e R.L. Wheeden ([FLW]).

Sia Ω un aperto di $\mathbf{R}^N$ e siano $X_1, \ldots, X_r$ campi vettoriali di classe $\mathbf{C}^\infty$ definiti in un intorno Ω_0 di $\bar{\Omega}$ che soddisfano la cosiddetta ipotesi di Hörmander, tali cioè che il rango dell'algebra di Lie generata da $X_1, \ldots, X_r$ è uguale a N in ogni punto di Ω_0. È ben noto che è possibile associare in modo naturale ad $X_1, \ldots, X_r$ una distanza ρ in Ω come il minimo tempo necessario per andare da un punto a un altro per mezzo di curve sub-unitarie. La geometria dello spazio metrico $(\mathbf{R}^N, \rho)$ è completamente descritta in [NSW]. In particolare è provato in [NSW] che tale spazio metrico è uno *spazio di tipo omogeneo* rispetto alla misura di Lebesgue dx, che cioè, se si denotano con $B(x,r)$ le sfere metriche di centro x e raggio r per la distanza ρ, risulta

$$|B(x,2r)| \leq \text{cost. } |B(x,r)|$$

per ogni $x \in \Omega$ e $r \in (0, r_0)$, dove, per ogni insieme L-misurabile E, $|E|$ è la sua misura.

Dati p, q con $1 \leq p \leq q$, diremo che sussiste in Ω una disuguaglianza di Sobolev-Poincaré p, q se

$$\left(\int_\Omega |f(x) - f_\Omega|^q dx \right)^{1/q} \leq C(\Omega) \left(\int_\Omega \left(\sum_j |< X_j, \nabla f >|^2 \right)^{p/2} dx \right)^{1/p}$$

per ogni funzione $f \in \mathrm{Lip}(\Omega)$, dove f_Ω è la media integrale di f su Ω. Nel seguito, per brevità, diremo che sussiste una $SP_{p,q}$. Il primo problema che si pone è quello di caratterizzare – se esistono – gli esponent p, q e gli aperti Ω per cui, assegnati certi campi vettoriali $X_1, \ldots, X_r$, è verificata una $SP_{p,q}$. Un secondo problema di grande interesse per le equazioni a derivate parziali è la caratterizzazione più precisa della costante $C(\Omega)$ in funzione di Ω. In particolare, diremo che sussiste una $SP_{p,q}$ *invariante* se per ogni sfera $B = B(x,r) \subseteq \Omega$ risulta

$$\left(\fint_B |f(x) - f_B|^q dx \right)^{1/q} \leq C\, r \left(\fint_B \left(\sum_j |< X_j, \nabla f >|^2 \right)^{p/2} dx \right)^{1/p},$$

dove la costante C è indipendente da f, x, r e dove con $\fint_E g(x)dx$ si denota la media integrale di g su E, e cioè $\fint_E g(x)dx = |E|^{-1} \int_E g(x)dx$. Nel caso non degenere, in cui cioè $p = N$ e $X_j = D_j$ per $j = 1, \ldots, N$, sono note condizioni su Ω che assicurano la validità della SP con $p \geq 1$ e $q = pN/(N-p)$ se $p < N$. Il primo risultato nel caso degenere è contenuto in [FL1] e si applica ad esempio al caso in cui $\mathbf{R}^N_{(x,y)} = \mathbf{R}^n_x \times \mathbf{R}^m_y$, $p = N$ e $X_1 = D_1, \ldots, X_n = D_n, X_{n+1} = |x|^k D_{n+1}, \ldots, X_N = |x|^k D_N$, dove $k \in \mathbf{N}$. Infatti, per provare stime puntuali per le soluzioni deboli di certi operatori ellittici degeneri tipo Grushin adattando il metodo di Moser alla geometria di ρ, in [FL1] si prova una $SP_{2,2}$ invariante per questi campi vettoriali. Sempre nella stessa prospettiva, una $SP_{2,2}$ non invariante è

provata in [FL2] per una classe più vasta di campi vettoriali. Ad esempio, questi ultimi risultati si applicano ai campi vettoriali che definiscono il gruppo di Heisenberg. Notiamo che i campi vettoriali di [FL1,2] non sono supposti $\mathbf{C}^\infty$, e quindi i risultati sono provati sostituendo la condizione di Hörmander con una opportuna condizione geometrica. Nello stesso spirito sono le SP (invarianti) provate in [X] nel caso $N = 2$ con $p = q = 2$, in [F1,2] con $p > 1$ e $q > p$ opportuno in condizioni che generalizzano quelle di [FL1] e in [FGuW] per campi vettoriali 'tipo Grushin' con $p \geq 1$ e q opportuno. Sull'ultimo risultato ritorneremo più oltre. Se i campi vettoriali soddisfano l'ipotesi di Hörmander, Jerison in [J] prova una $SP_{p,p}$ invariante con $1 \leq p < \infty$ e dà esempi di aperti Ω per cui la $SP_{2,2}$ non è verificata per certi campi vettoriali. Successivamente G. Lu in [L1,2] prova una SP invariante se $1 < p < Q$ e $1 \leq q \leq pQ/(Q-p)$, dove Q è la cosiddetta *dimensione pseudo-omogenea* associata ai campi vettoriali (che verrà definita con precisione più oltre) e che dipende dal comportamento per $r \to 0$ della misura delle sfere $B(x,r)$ (nel caso non degenere $Q = N$).

I risultati di [L1,2] sono del tutto ottimali fuorchè per il vincolo $p > 1$. Questo vincolo è strettamente legato alla tecnica di prova di [L1,2], dove il primo passo consiste in una stima puntuale per funzioni f su una sfera metrica con un integrale frazionario della funzione massimale di Hardy-Littlewood della funzione e del suo gradiente degenere $\left(\sum_j |< X_j, \nabla f >|^2\right)^{1/2}$. Succesivamente, per concludere la prova, viene utilizzato un risultato di continuità $L^p - L^q$ per la funzione massimale, ed è ben noto che questa continuità non sussiste più se $p = 1$. D'altro canto, il caso limite $p = 1$ contiene informazioni geometriche molto più profonde del caso $p > 1$, tanto che, quando $p = 1$ e q è scelto in modo ottimale, parleremo di *caso geometrico*, in quanto allora SP è equivalente a una disuguaglianza isoperimetrica relativa. Vedremo nel seguito quale forma prenda questa disuguaglianza per campi vettoriali; osserviamo però che, nel caso non degenere, se E è un aperto limitato sufficientemente regolare e $B = B(x,r)$ è una sfera (Euclidea) di $\mathbf{R}^N$, allora, applicando la SP invariante con $p = 1, q = N/(N-1)$ a una successione di funzioni regolari che approssimano la funzione caratteristica di $B \cap E$ e passando al limite, si ottiene appunto la disuguaglianza isoperimetrica relativa

$$\min\{|B \cap E|, |B \setminus E|\}^{1-1/N} \leq \text{const.}\, |\partial E \cap B|.$$

Per trattare il caso geometrico è necessario allora utilizzare una diversa tecnica di dimostrazione: il primo passo consiste nell'eliminare la funzione massimale nella formula di rappresentazione e successivamente utilizzare un argomento di [SW] (ripreso in [FGuW] e in [FGaW1,2] per provare appunto disuguaglianze geometriche) che non utilizza argomenti interpolatori e permette quindi di trattare il caso limite $p = 1$. Tuttavia, questo tipo di tecnica non può essere applicato immediatamente al nostro caso perchè la stima puntuale contiene termini di ordine zero nell'integrale frazionario. Così sarà necessario adattare la tecnica e utilizzare la $SP_{1,1}$ di Jerison per eliminare i termini di ordine zero. È possibile allora provare il risultato seguente:

Teorema I. *Esistono una constante $Q \geq N$ (dipendente solo da $X_1, \ldots, X_r$, come si vedrá nel seguito) e due costanti positive r_0 e C (dipendenti solo da $X_1, \ldots, X_r$, Ω e Ω_0) tali che,*

per ogni sfera metrica $B = B(x,r) \subset \Omega_0$ con $x \in \Omega$ e $r < r_0$ e per ogni $p \in [1, Q[$, si ha:

$$\left(\fint_B |f(x) - f_B|^{pQ/(Q-p)} dx \right)^{(Q-1)/Q}$$

$$\leq C\,r \left(\fint_B \left(\sum_j | < X_j, \nabla f > |^2 \right)^{p/2} dx \right)^{1/p}$$

per ogni $f \in Lip(\Omega)$.

Osserviamo tuttavia che nelle applicazioni alle equazioni alle derivate parziali, spesso è utile poter sostituire, a destra e a sinistra nella SP, la misura di Lebesgue dx rispettivamente con due misure $\omega_1 dx$ e $\omega_2 dx$ dove $\omega_1, \omega_2 \in L^1_{\rm loc}$ sono date funzioni peso non negative. Risultati di questo tipo sono contenuti in [FS] (per campi tipo [FL1]), [F1,2], [FGuW] (nel caso geometrico) e [L1]. Anche in questo caso è possibile provare risultati ottimali di tipo geometrico; per formularli, occorre richiamare preliminarmente alcune notazioni: diremo che una misura $d\mu$ è *doubling* se

$$\mu(B(x, 2r)) \leq \text{const.}\, \mu(B(x,r))$$

per ogni sfera metrica $B(x,r)$ con $x \in \Omega$ e $r < r_0$. Diremo poi che la funzione peso ω è doubling se è doubling la misura $\omega(x)dx$; scriveremo poi spesso $\omega(E)$ per $\int_E \omega(x)dx$. Ricordiamo infine che lo spazio metrico (Ω_0, ρ) è uno spazio di tipo omogeneo rispetto alla misura di Lebesgue, ed è quidi possibile, seguendo Calderòn [C], sviluppare una teoria dei pesi A_p rispetto alla metrica ρ. Più precisamente diremo che una funzione peso ω appartiene ad A_p $(= A_p(\Omega_0, \rho, dx))$ quando

se $p = 1$, allora $\fint_B \omega(x)\, dx \leq C \operatorname{ess\,inf}_B \omega$;

se $p \in (1, \infty)$, allora $\left(\fint_B \omega(x)\, dx \right) \left(\fint_B \omega(x)^{-1/(p-1)}\, dx \right)^{p-1} \leq C$

per tutte le sfere metriche B. Notiamo esplicitamente che, quando nella media compare una misura $\omega(x)dx$, la media va intesa rispetto a tale misura. Possiamo allora formulare il nostro risultato principale.

Teorema II. *Siano ω_1 e ω_2 due funzioni peso tali che ω_2 è doubling e $\omega_1 \in A_p$ per qualche $p \geq 1$ e sia Q come nel Teorema I.Se $q > p$ è tale che*

$$\text{(CW*)} \qquad \frac{s}{r} \left(\frac{\omega_2(B_s)}{\omega_2(B)} \right)^{1/q} \leq c \left(\frac{\omega_1(B_s)}{\omega_1(B)} \right)^{1/p} \left(\frac{s^Q}{r^Q} \frac{|B_r|}{|B_s|} \right)^{1/p - 1/q}$$

per ogni sfera metrica $B_s = B(y,s) \subseteq 5B = B(x, 5r) \subset \Omega_0$ con $y \in \Omega$, allora esistono delle

costanti $C > 0$ e $r_0 > 0$ tali che

$$\left(\fint_B |f(x) - f_B|^q \omega_2(x) dx \right)^{1/q}$$

$$\leq C\, r \left(\fint_B \left(\sum_j | < X_j, \nabla f > |^2 \right)^{p/2} \omega_1(x) dx \right)^{1/p}$$

per ogni $f \in Lip(\Omega)$ se $r < r_0$,. Notiamo esplicitamente che qui f_B denota la media rispetto alla misura $\omega_2(x)dx$.

Notiamo che un risultato simile era stato provato in [L1] sotto ipotesi più restrittive sulle funzioni peso e sempre nei casi non geometrici $p > 1$.

Diamo ora un'idea della dimostrazione dei Teoremi I e II. A tal fine, ricordiamo un importante risultato dovuto a Rotschild e Stein: possiamo aggiungere a $(x_1, \ldots, x_N)$ nuove variabili $(t_1, \ldots, t_s) \in \mathbf{R}^s$ e formare nuovi campi vettoriali in $\Omega_0 \times \mathbf{R}^s$

$$\tilde{X}_j = X_j + \sum_{\ell=1}^{s} a_{j\ell}(x,t) \frac{\partial}{\partial t_\ell}, \quad j = 1, \ldots, r,$$

in modo che i nuovi campi $\tilde{X}_1, \ldots \tilde{X}_r$ verifichino ancora l'ipotesi di Hörmander allo stesso ordine m su un opportuno aperto di $\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^s$, ma siano inoltre 'liberi fino all'ordine m', cioè i loro commutatori di lunghezza al più m non soddisfino relazioni lineari eccetto quelle date dall'antisimmetria e dalla relazione di Jacobi. Se indichiamo con m_j il numero di commutatori linearmente indipendenti di ordine j allora il numero

$$Q = \sum_j j m_j$$

è chiamato la dimensione omogenea dei campi vettoriali. Nel seguito indicheremo con $\tilde{\Omega}$ ($\tilde{\Omega}_0$) l'aperto $\Omega \times T$ ($\Omega_0 \times T$), dove T è la sfera Euclidea unitaria in $\mathbf{R}^s$, e con $\tilde{\rho}$ la metrica associata a $\tilde{X}_1, \ldots \tilde{X}_r$.

Osserviamo che, se $\tilde{X}_j = X_j$, $j = 1, \ldots, r$, allora la condizione (CW*) si riduce alla condizione di bilanciamento introdotta da Chanillo e Wheeden che è 'quasi necessaria 'per la validità di SP (si vedano ad esempio i commenti in [FGuW] e [FGaW]).

Il primo passo consiste nel provare una formula di rappresentazione che è più delicata della corrispondente formula per funzioni a supporto, in quanto non è possibile utilizzare le proprietà della soluzione fondamentale dell'operatore $\sum_j \tilde{X}_j^2$, e che richiede un raffinamento della corrispondente stima provata in [L1], Lemma 3.2.

Lemma 1. *Esistono delle costanti positive C e c tali che, per ogni sfera $\tilde{B} = \tilde{B}(\xi_0, r)$, $\xi_0 \in \tilde{\Omega}$ e per ogni funzione $f \in Lip(\tilde{B})$, risulta*

$$|f(\xi) - f_{\tilde{B}}| \leq C \int_{c\tilde{B}} \frac{|\tilde{X} f|(\eta)}{\tilde{\rho}(\xi,\eta)^{Q-1}} d\eta$$

per tutte le $\xi \in \tilde{B}$, dove C e c sono indipendenti da f e $\tilde{B}$, e

$$|\tilde{X}f|^2 = \sum_j < \tilde{X}_j, \nabla f >^2$$

.

Successivamente si possono adattare gli argomenti di [SW], [FGuW] e [FGaW1,2] per ottenere la prova del Teorema I per i campi vettoriali liberi $\tilde{X}_1, \dots \tilde{X}_r$. La ulteriore difficoltà che si presenta in questo caso è dovuta al fatto che in un primo tempo si ottiene una formula di rappresentazione che contiene termini di ordine zero. La difficoltà può essere sorpassata utilizzando la SP_{1-1} di [J]. Integrando poi rispetto alle alle variabili extra come in [NSW] si può allora completare la prova.

La prova del teorema II è analoga; la differenza principale è data dalla necessità di prolungare le funzioni peso in $\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^s$ come in [L1].

I risultati precedenti si applicano a sfere metriche. È naturale ora chiedersi se sia possibile estendere questi risultati ad aperti più generali, come accade nel caso non degenere. A tal fine occorre dare la seguente definizione:

Diremo che un aperto Ω in uno spazio quasi-metrico (X, d) soddisfa la *condizione della catena di Boman* $\mathcal{F}(\tau, M), \tau \geq 1, M \geq 1$, se esiste un ricoprimento W di Ω costituito da sfere B tali che:

(i) $\sum_{B \in W} \chi_{\tau B}(x) \leq M \chi_\Omega(x) \quad \forall x \in X$;
(ii) Esiste una sfera "centrale" $B_1 \in W$ che può essere connessa ad ogni sfera $B \in W$ con una catena finita di sfere $B_1, B_2, \dots, B_{l(B)} = B$ di W così che $B \subset MB_j$ per $j = 1, \dots, l(B)$. Inoltre, $B_j \cap B_{j-1}$ contiene una sfera R_j tale che $B_j \cup B_{j-1} \subset MR_j$ per $j = 2, \dots, l(B)$.

Vale allora il seguente risultato

Lemma 3. *Siano $\tau, M \geq 1, 1 \leq p \leq q < \infty$ e Ω soddisfi la condizione della catena di Boman $\mathcal{F}(\tau, M)$ in uno spazio quasi-metrico (X, d). Inoltre, siano μ e ν misure di Borel e μ sia doubling. Supponiamo che f e g siano funzioni misurabili in Ω e che per ogni sfera B con $\tau B \subset \Omega$ esista una costante g_B tale che*

(3.a) $$||g - g_B||_{L^q_{d\mu}(B)} \leq A||f||_{L^p_{d\nu}(\tau B)}$$

con A indipendente da B. Allora esiste una costante g_Ω tale che

(3.b) $$||g - g_\Omega||_{L^q_{d\mu}(\Omega)} \leq cA||f||_{L^p_{d\nu}(\Omega)},$$

dove c dipende solo da τ, M, q e μ. Inoltre possiamo scegliere $g_\Omega = g_{B_1}$ dove B_1 una sfera centrale per Ω.

La prova del lemma precedente consiste semplicemente nell'adattamento alla nuova situazione geometrica dell'analogo risultato in ambito euclideo provato da Chua [Ch].

Supponiamo ora ad esempio che $\tilde{X}_j = X_j$ per $j = 1, \ldots, r$ e sia Ω un aperto di $\mathbf{R}^N$ che verifica la condizione della catena di Boman nello spazio metrico (Ω_0, ρ). Scegliendo $d\mu = \omega_2(x)dx$ e $d\nu = \omega_1(x)dx$, per il Teorema II risulta allora verificata la (3.a) con

$$A = \sup \frac{r\omega_2(B)^{1/q}}{\omega_1(B)^{1/p}},$$

dove l'estremo superiore è preso al variare di $B = B(x,r)$ in W, essendo W il ricoprimento che interviene nella definizione di catena di Boman. D'altra parte, per la (ii), se $B \in W$ risulta $B \subset MB_1$, essendo B_1 la sfera centrale. Si può quindi applicare la condizione (CW) e scegliere

$$A = \frac{r_1\omega_2(B_1)^{1/q}}{\omega_1(B_1)^{1/p}}.$$

La (3.b) dà allora la SP in Ω.

Si è detto che l'importanza del caso geometrico consiste nel fatto che la disuguaglianza nel caso geometrico è equivalente ad una opportuna forma della disuguaglianza isoperimetrica relativa. Diamo ora una formulazione precisa di questo risultato, almeno nei casi più regolari. Ricordiamo che in [FGaW1,2] è stata provata la seguente disuglianza isoperimetrica per insiemi regolari contenuti in una sfera metrica.

Teorema III. *Sia (ω_1, ω_2) una coppia di funzioni peso in Ω_0 tali che ω_2 è doubling, $\omega_1 \in A_1$ ed è continua. Supponiamo che esistano delle costanti $c > 0$ e $q > 1$ tali che*

$$\frac{s}{r}\Big(\frac{\omega_2(B_s)}{\omega_2(B)}\Big)^{1/q} \le c\Big(\frac{\omega_1(B_s)}{\omega_1(B)}\Big)$$

per ogni sfera metrica $B_s = B(y,s) \subseteq 5B = B(x,5r) \subset \Omega_0$ con $y \in \Omega$. Sia poi E un dominio connesso di classe $\mathbf{C}^2$ con frontiera ∂E, sia cioè E un aperto connesso localmente $\mathbf{C}^2$-diffeomorfo a un semispazio vicino a ∂E. Se $E \subset\subset B_0 = B(x_0, r_0)$ con $x_0 \in \Omega$ e $r_0 \le R_0$ opportuno, allora

$$\omega_2(E)^{1/q} \le C \int_{\partial E} \Big(\sum_j < X_j, \nu >^2\Big)^{1/2} \omega_1(x) dH_{N-1}(x),$$

dove ν è il campo normale unitario alla frontiera di E.

Questo risultato dice che la misura di bordo naturale è data da

$$\Big(\sum_j < X_j, \nu >^2\Big)^{1/2} \omega_1 dH_{N-1},$$

mentre $q/(q-1)$ sostitusce la dimensione N di E come varietà.

Un analogo risultato vale ora in senso locale, si ha cioè la seguente disuguaglianza isoperimetrica relativa.

Teorema IV. *Supponiamo $\tilde{X}_j = X_j$ per $j = 1, \dots, r$ e sia (ω_1, ω_2) una coppia di funzioni peso in Ω_0 tali che ω_2 è doubling, $\omega_1 \in A_1$ ed è continua. Supponiamo che esistano delle costanti $c > 0$ e $q > 1$ tali che*

$$\frac{s}{r}\Big(\frac{\omega_2(B_s)}{\omega_2(B)}\Big)^{1/q} \le c\Big(\frac{\omega_1(B_s)}{\omega_1(B)}\Big)$$

per ogni sfera metrica $B_s = B(y,s) \subseteq 5B = B(x,5r) \subset \Omega_0$ con $y \in \Omega$. Sia poi $E \subseteq \Omega$ un dominio connesso di classe $\mathbf{C}^2$ con frontiera ∂E, sia cioè E un aperto connesso limitato localmente $\mathbf{C}^2$-diffeomorfo a un semispazio vicino a ∂E. Se $B_0 = B(x_0, r_0) \subset \Omega_0$ è una sfera arbitraria con $x_0 \in \Omega$ e $r_0 \le R_0$, allora

$$\min\{\omega_2(B_0 \cap E), \omega_2(B_0 \setminus E)\}^{1/q} \le C \int_{\partial E \cup B} (\sum_j < X_j, \nu >^2)^{1/2} \omega_1 dH_{N-1} \, ,$$

dove ν è il campo normale unitario alla frontiera di E. La costante C è indipendente da E se assumiamo E contenuto in una sfera fissa di raggio grande.

Denotiamo con $d = d(x)$ l'usuale distanza euclidea di x da E. Per le nostre ipotesi, d è una funzione Lipschitziana in B_0. Se $\varepsilon > 0$, poniamo $f_\varepsilon(x) = (1 - d(x)/\varepsilon)^+$; possiamo allora applicare il Teorema II in B_0 con $p = 1$, ottenendo

$$\begin{aligned}
&\int_{B_0} |f_\varepsilon - \fint_{B_0} f_\varepsilon(y)\omega_2(y)dy|\omega_2(x)dx \\
&\le C r_0 \frac{\omega_2(B_0)^{1/q}}{\omega_1(B_0)} \frac{1}{\varepsilon} \int_{B_0} |X f_\varepsilon| \omega_1(x) dx \\
&\le C r_0 \frac{\omega_2(B_0)^{1/q}}{\omega_1(B_0)} \frac{1}{\varepsilon} \int_{B_0 \cup \{0 < d(x) \le \varepsilon\}} \left(\sum_j < X_j, \nabla d >^2\right)^{1/2} \omega_1(x) dx.
\end{aligned}$$

Se assumiamo $E \subseteq B(\bar{x}, \bar{R})$, possiamo supporre senza ledere la generalità che $\bar{\Omega}$ sia un compatto. Possiamo allora coprire $\bar{\Omega}$ con una famiglia di sfere $\{B_j = B(x_j, R), j = 1, \dots, m\}$ per un certo $R = R(\Omega) > 0$. Risulta allora

$$r_0 \frac{\omega_2(B_0)^{1/q}}{\omega_1(B_0)} \le C(\Omega) R(\Omega) \frac{\omega_2(B(x_0, R(\Omega)))^{1/q}}{\omega_1(B(x_0, R(\Omega)))}.$$

D'altra parte, $x_0 \in B_{j_0}$ per qualche $j_0 \in \{1, \dots, m\}$, e quindi, tenendo presente che $\omega_1 dx$ e $\omega_2 dx$ sono misure doubling, risulta:

$$\begin{aligned}
r_0 \frac{\omega_2(B_0)^{1/q}}{\omega_1(B_0)} &\le C(\Omega) \max\left\{ \frac{\omega_2(B_j)^{1/q}}{\omega_1(B_j)}, j = 1, \dots, m \right\} \\
&= C_1(\Omega).
\end{aligned}$$

Osserviamo che f_ε tende quasi ovunque alla funzione caratteristica di E per $\varepsilon \to O+$, e quindi

$$\int_{B_0} \left| \chi_E(x) - \frac{\omega_2(B_0 \cap E)}{\omega_2(B_0)} \right| \omega_2(x)dx$$

$$\leq C_2(\Omega) \lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{1}{\varepsilon} \int_{B_0 \cap \{0 < d(x) \leq \varepsilon\}} \left(\sum_j < X_j, \nabla d >^2 \right)^{1/2} \omega_1(x)dx$$

$=$ (per la formula di co-area)

$$C_2(\Omega) \lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon dt \int_{d(x)=t} \left(\sum_j < X_j, \frac{\nabla d}{|\nabla d|}^2 \right)^{1/2} \chi_E(x)\omega_1(x)dH_{N-1}(x),$$

da cui l'asserto.

Osservazione. Osserviamo esplicitamente che gli stessi risultati (SP in aperti che soddisfano la condizione della catena di Boman e disuguaglianze isoperimetriche relative) restano validi per i campi vettoriali non regolari considerati in [FL1], [F1] e [FGuW].

BIBLIOGRAFIA

[C] A. P. Calderón, *Inequalities for the maximal function relative to a metric*, Studia Math. **57** (1976), 297–306.

[Ch] S. -K. Chua, *Weighted Sobolev's inequality on domains satisfying the Boman chain condition*, Proc. Amer. Math. Soc., in corso di stampa.

[FL1] B. Franchi et E. Lanconelli, *Hölder regularity for a class of linear non uniformly elliptic operators with measurable coefficients*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa **(IV) 10** (1983), 523–541.

[FL2] B. Franchi et E. Lanconelli, *Une condition geometrique pour l'inegalité de Harnack*, J. Math. Pures Appl. **64** (1985), 237–256.

[FS] B. Franchi e R. Serapioni, *Pointwise estimates for a class of strongly degenerate elliptic operators*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa **(IV) 14** (1987), 527–568.

[F1] B. Franchi, *Weighted Sobolev-Poincaré inequalities and pointwise estimates for a class of degenerate elliptic equations*, Trans. Amer. Math. Soc. **327** (1991), 125–158.

[F2] ———, *Inégalités de Sobolev pour des champs de vecteurs lipschitziens*, C. R. Acad. Sci. Paris **311** (1990), 329–332.

[15] B. Franchi, C. Gutierrez, R.L. Wheeden, *Weighted Sobolev-Poincaré inequalities for Grushin type operators*, Comm. Partial Differential Equations, in corso di stampa.

[FGaW1] B. Franchi, S. Gallot, R. L. Wheeden, *Sobolev and isoperimetric inequalities for degenerate metrics*, Prépublication de l'Institut Fourier, Grenoble, 245 (1993).

[FGaW2] B. Franchi, S. Gallot, R.L. Wheeden, *Inégalités isopérimetriques pour des métriques dégénérées*, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. A **317** (1993), 651–654.

[FLW] B. Franchi, G. Lu, R.L. Wheeden, in preparazione.

[J] D. Jerison, *The Poincaré inequality for vector fields satisfying Hörmander condition*, Duke Math. J. **53** (1986), 503–523.

[L1] G. Lu, *The sharp Poincaré inequality for free vector fields: An endpoint result*, Revista Mat. Iberoamericana, to appear.

[L2] ———, *Weighted Poincaré and Sobolev inequalities for vector fields satisfying Hörmader's condition and applications*, Revista Mat. Iberoamericana **8**, 367–439.

[SW] E. Sawyer and R. L. Wheeden, *Weighted inequalities for fractional integrals on Euclidean and homogeneous spaces*, Amer. J. Math. **114** (1992), 813–874.

[X] C. -J. Xu, *The Harnack's inequality for second order degenerate elliptic operators*, Chinese Ann. Math. Ser. A **10** (1989), 103–109 (in Chinese).

[NSW] A. Nagel, E.M. Stein et S. Wainger, *Balls and metrics defined by vector fields I: basic properties*, Acta Math. **155** (1985), 103–147.